CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS

13 aprilie 2019

CLASA a IX-a (științele naturii, servicii, tehnic, resurse naturale și protecția mediului)

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Se consideră șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ *cu primul termen* $a_1=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3}+\frac{2n}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \forall n\geq 1$ *și șirul* $(b_n)_{n\in N^*}$, $b_n=a_n\sqrt{3}-n, \quad \forall n\geq 1$

a) Să se arate că $(b_n)_{n\in N^*}$ *este o progresie geometrică;*

b) Demonstrați că $a_n=\frac{n}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad \forall n\geq 1$

c) Dacă $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$ *arătați că* $S_n\sqrt{3}-\frac{n(n+1)}{2}<3$

Barem:

a) $b_{n+1}=a_{n+1}\sqrt{3}-n-1=\frac{a_n}{\sqrt{3}}+\frac{2n}{3}+1-n-1=\frac{a_n\sqrt{3}-n}{3}, \quad \forall n\geq 1$

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{3}\Rightarrow b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n \quad \forall n\geq 1\Rightarrow b_n$ *este progresie geometrică* …………………………….3p

b) b_n *- progresie geometrică* $\Rightarrow b_n=b_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. *Prin urmare*

$2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=a_n\sqrt{3}-n\Rightarrow \quad a_n=\frac{n}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad \forall n\geq 1$ ………………………………………2p

c) $S_n=\frac{1}{\sqrt{3}}(1+2+3+....+n)+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

În consecință $S_n\sqrt{3}-\frac{n(n+1)}{2}=3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<3, \quad \forall n\geq 1$ ……………………………………..2p

SUBIECTUL 2

Fie ABCD un patrulater convex.

a) Determinați un punct M din plan astfel încât $MA+MB+MC+MD$ *să fie minimă;*

b) Determinați un punct N din plan astfel încât $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}$ *să fie minim.*

Barem:

a) $\left.\begin{array}{l}\text{În } \Delta MAC: MA+MC\geq AC\\ \text{În } \Delta MBD: MB+MD\geq BD\end{array}\right\}\Rightarrow MA+MC+MB+MD\geq AC+BD\Rightarrow MA+MC+MB+MD$

este minimă când avem egalitate, adică $MA+MC=AC$ *și* $MB+MD=BD$. *Deci*

$M \in AC$ și $M \in BD \Rightarrow M = AC \cap BD$ deci M este punctul de intersecție al diagonalelor lui ABCD……………………………………………………………………………….3p

b) $$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{NE} \text{ unde } E-\text{mijlocul lui } (AC)\\ \overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=2\overrightarrow{NF} \text{ unde } F-\text{mijlocul lui } (BD)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}=2\left(\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}\right)=$$

$= 4\overrightarrow{NO}$ *unde $O-$mijlocul lui (EF).* ……………………………………………………………….3p

Prin urmare $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}$ este minim $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{NO}$ este minim $\Leftrightarrow N = O$ adică N este mijlocul segmentului care unește mijloacele diagonalelor lui ABCD……………………..1p

SUBIECTUL 3

Doi curieri pleacă în același timp, pe același drum, din A, respectiv B, unul spre celălalt, cu viteze constante dar diferite între ele. După întâlnire, pentru a ajunge la capătul drumului AB, unuia i-au mai trebuit 16 ore iar celuilalt 9 ore. De câte ore a avut nevoie fiecare pentru a parcurge întregul traseu?

Barem:

Notăm t – timpul scurs de la plecare până la întâlnire (măsurat în ore)

v_1 - viteza primului curier

v_2 - viteza celui de-al doilea curier

Atunci distanța dintre A și B este: $t(v_1+v_2)=(t+16)v_1=(t+9)v_2$ ………………….……………….4p

$$\begin{cases}tv_1+tv_2=tv_1+16v_1\\ tv_1+tv_2=tv_2+9v_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tv_2=16v_1\\ tv_1=9v_2\end{cases} \Rightarrow t^2v_1v_2=9\cdot 16v_1v_2 \Rightarrow t=12 \text{ ore}$$

Prin urmare primul curier a avut nevoie de 28 de ore iar al doilea de 21 de ore ……………3p

SUBIECTUL 4

a) *Arătați că* $\sqrt{n(n+2)} \notin Q, \quad \forall n \in N^*$

b) *Calculați* $S=\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{5\cdot 7}\right]+\left[\sqrt{9\cdot 11}\right]+.....+\left[\sqrt{2017\cdot 2019}\right]$

Barem:

a) Observăm că (1) $n<\sqrt{n(n+2)}<n+1 \Leftrightarrow n^2<n^2+2n<n^2+2n+1 \quad \forall n \in N^*$ *(adevărat)*

$\Rightarrow \sqrt{n(n+2)} \notin N$ *deci* $\sqrt{n(n+2)} \notin Q$ ……………………………………………………………….3p

b) Din (1) $\Rightarrow \left[\sqrt{n(n+2)}\right]=n$, *prin urmare* ……………………………………………………….2p

$S=\left[\sqrt{1\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{5\cdot 7}\right]+\left[\sqrt{9\cdot 11}\right]+.....+\left[\sqrt{2017\cdot 2019}\right]=1+5+9+....2017=$ ……………1p

$=1+(4\cdot 1+1)+(4\cdot 2+1)+....+(4\cdot 504+1)=505+4\dfrac{504\cdot 505}{2}=505\cdot 1009=509545$ ...1p