CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS

13 aprilie 2019

CLASA a IX-a (matematică-informatică)

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2019|=2020(x-2019)$$

Barem:

Condiția ca $x-2019\geq 0$………………………………………………………………2p

Ecuația devine: $2019\cdot x-\frac{2019\cdot 2020}{2}=2020\cdot x-2019\cdot 2020$……………………………3p

$x=1010\cdot 2019=2039190$……………………………………………………………………2p

SUBIECTUL 2

a) *Să se arate că* $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x],\ \forall x\in R$

b) *Să se calculeze:* $\left[\frac{2020}{2}\right]+\left[\frac{2021}{4}\right]+\left[\frac{2022}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{2019+2^{2018}}{2^{2019}}\right]$

(s-a notat cu $[x]$ *- partea întreagă a numărului x)*

Barem:

a) *Fie* $x\in R$ *a.î.* $[x]=k\Rightarrow x\in[k,k+1)$

I) *Dacă* $x\in\left[k,k+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x+\frac{1}{2}\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right)$, $2x\in[2k,2k+1)\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=k$, $[2x]=2k$

II) *Dacă* $x\in\left[k+\frac{1}{2},k+1\right)\Rightarrow x+\frac{1}{2}\in\left[k+1,k+\frac{3}{2}\right)$, $2x\in[2k+1,2k+2)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=k+1$, $[2x]=2k+1$. *În ambele cazuri* $\Rightarrow$ *cerința* ……………2p

b) $\left[\frac{2020}{2}\right]=\left[\frac{2019+1}{2}\right]=\left[\frac{2019}{2}+\frac{1}{2}\right]=[2019]-\left[\frac{2019}{2}\right]$,

$\left[\frac{2021}{4}\right]=\left[\frac{2019+2}{4}\right]=\left[\frac{2019}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2019}{2}\right]-\left[\frac{2019}{4}\right]$,

…….

$\left[\frac{2019+2^{2018}}{2^{2019}}\right]=\left[\frac{2019}{2^{2019}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2019}{2^{2018}}\right]-\left[\frac{2019}{2^{2019}}\right]$, ………………………………………3p

Adunând relațiile obținem: $\left[\frac{2020}{2}\right]+\left[\frac{2021}{4}\right]+\left[\frac{2022}{8}\right]+\ldots+\left[\frac{2019+2^{2018}}{2^{2019}}\right]=$

$[2019]-\left[\frac{2019}{2^{2019}}\right]=2019-0=2019$,………………………………………………2p

SUBIECTUL 3

Fie M și N mijloacele laturilor AB și AD ale patrulaterului ABCD. Arătați că centrul de greutate al triunghiului CMN este situat pe segmentul determinat de mijloacele diagonalelor patrulaterului.

Barem:

Fie G centrul de greutate al triunghiului CMN, iar P și Q mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD.

$\overline{GP}=\frac{1}{2}(\overline{GA}+\overline{GC})$ *și* $\overline{GQ}=\frac{1}{2}(\overline{GB}+\overline{GD})$……………………………………………………………2p

Dar $\overline{GC}+\overline{GN}+\overline{GM}=\overline{0}$ *de unde rezultă că* $\overline{GC}+\frac{1}{2}(\overline{GA}+\overline{GB})+\frac{1}{2}(\overline{GA}+\overline{GD})=\overline{0}$… …………2p

Prin urmare $2\overline{GP}+\overline{GQ}=\overline{0} \Rightarrow$ *G,P,Q coliniare și* $G\in[PQ]$…………………………………………3p

SUBIECTUL 4

Fie punctele A, B, C, D a.î. $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=-\vec{i}$ *și* $\overrightarrow{OD}=-\vec{j}$*, O fiind originea axelor de coordonate determinate de versorii perpendiculari* $\vec{i}, \vec{j}$. *M, N, P, Q sunt puncte situate pe segmentele* (AB), (BC), (CD) *și respectiv* (DA).

a) *Arătați că dacă* $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$ *atunci* $\overrightarrow{OM}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$

b) *Demonstrați că* $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OM}=0$

Barem:

a) $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=m\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$ …… ……....3p

b) *Fie m, n, p, q a.î.* $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=p\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ}=q\overrightarrow{DA}$

$$\text{Din a)}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{ON}=(1-n)\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OP}=(1-p)\overrightarrow{OC}+p\overrightarrow{OD}\\ \overrightarrow{OM}=(1-q)\overrightarrow{OD}+q\overrightarrow{OA}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=(1-m)\vec{i}+m\vec{j}\\ \overrightarrow{ON}=(1-n)\vec{j}+n(-\vec{i})\\ \overrightarrow{OP}=(1-p)(-\vec{i})+p(-\vec{j})\\ \overrightarrow{OM}=(1-q)(-\vec{j})+q\vec{i}\end{array}\right\}\Rightarrow\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=m-n\\ \overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}=n-p\\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=p-q\\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OM}=q-m\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OM}=0\ldots\ldots\ldots\ldots 2p$$