CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS

13 aprilie 2019

CLASA a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Fie $m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $m \cdot n = p \cdot q$.

a) *Arătați că* $m(m+n+p+q)=(m+p)(n+q)$.

b) *Arătați că numărul* $m+n+p+q$ *nu poate fi prim.*

Barem:

a) *Avem succesiv:* $m(m+n+p+q)=m^2+mn+mp+mq=m^2+pq+mp+mq=$
$=m(m+p)+q(m+p)=(m+p)(n+q)$. ……………………………………………………3p

b) *Dacă* $m+n+p+q$ *ar fi prim atunci ar divide pe* $m+p$ *sau* $m+q$ *care sunt nenule și strict mai mici decât* $m+n+p+q$, *absurd*……………………………………………………4p

SUBIECTUL II

Fie $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $a^2+b^2=c^2$ *și* $a \le b$.

a) *Arătați că* $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \notin Q$;

b) *Arătați că există a și b prime între ele și nedivizibile cu 5 a.î.* $\sqrt{a^2 \cdot b^2+c^2} \in N$

Barem:

a) *Din* $a^2+b^2=c^2$ *obținem* $a^2+b^2+c^2=c^2+c^2=2c^2$ *de unde rezultă*
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{2c^2}=c\sqrt{2}, \quad c \in N^* \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} \notin Q$ ……………………………3p

b) *Dacă a și b sunt nedivizibile cu 5 atunci* a^2 *și* b^2 *pot fi de forma 5k+1 sau 5k+4 cu* $k \in \mathbb{N}$. *Dacă a și b ar fi de aceeași formă atunci* $c^2=a^2+b^2$ *ar fi de forma 5k+2 sau 5k+3, fapt imposibil. În consecință* a^2 *și* b^2 *sunt de forme diferite deci* $a^2+b^2=5q \Rightarrow c^2=5q$ $\Rightarrow 5/c \Rightarrow c^2=25p^2 \Rightarrow a^2+b^2=25p^2$. *Putem alege* $a^2=9p^2$ *și* $b^2=16p^2 \Rightarrow a=3p, b=4p$
Deoarece $(a,b)=1 \Rightarrow p=1 \Rightarrow a=3, b=4, c=5 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{9\cdot16+25}=13$ …………4p

SUBIECTUL III

Se consideră piramida VABC cu baza triunghiul echilateral ABC. Semidreptele [AX, [BY și [CZ sunt bisectoare ale unghiurilor $\sphericalangle VAB, \sphericalangle VBC$ *și* $\sphericalangle VCA$, *unde* $X \in (VB), Y \in (VC)$ *și* $Z \in (VA)$.

a) *Arătați că* $\frac{VX}{XB}=\frac{VA}{AB}, \frac{VY}{YC}=\frac{VB}{BC}, \frac{VZ}{ZA}=\frac{VC}{CA}$;

b) *Folosind eventual relațiile de la punctual a) arătați că piramida este regulată dacă și numai dacă planele (ABC) și (XYZ) sunt paralele.*

Barem:

a) *Relațiile din enunț rezultă din aplicarea teoremei bisectoarei în triunghiurile:* ΔVAB, ΔVBC *și respectiv* ΔVCA. ……………………………………………………3p *b) Avem succesiv* $(ABC)//(XYZ) \Leftrightarrow XY//BC$ *și* $YZ//AC \Leftrightarrow \frac{VX}{XB} = \frac{VY}{YC}$ *și* $\frac{VY}{YC} = \frac{VZ}{ZA} \overset{a)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \frac{VA}{AB} = \frac{VB}{BC} = \frac{VC}{CA} \Leftrightarrow VA = VB = VC \Leftrightarrow VABC$ *- piramidă triunghiulară regulată. 4p*

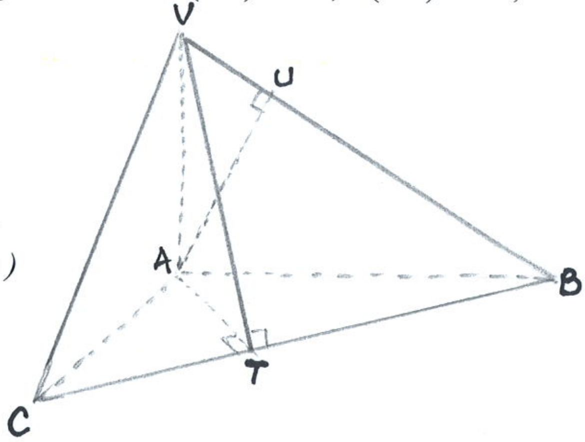
SUBIECTUL IV

Fie VA o dreaptă perpendiculară pe planul unui triunghi ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^0$, $m(\sphericalangle B) = 75^0$, $BC = 4\left(\sqrt{3}+1\right)cm$ *și* $VA = 25\% \cdot BC$.

a) Calculați distanța de la punctual V la dreapta BC.

b) Distanța dintre dreptele AC și VB.

(Se consideră cunoscut faptul că $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$*)*



Barem:

a) Fie $AT \perp BC, T \in (BC)$.

$m(\sphericalangle A) = 90^0, m(\sphericalangle B) = 75^0 \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 15^0, m(\sphericalangle BAT) = 15^0$. $VA = \frac{25}{100}BC = \frac{BC}{4} = \left(\sqrt{3}+1\right)cm$

$\sin 15^0 = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 4\left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$ 2p

$\Delta ABC:\ AC^2 = BC^2 - AB^2 = 16\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 8 = 56 + 32\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{56+32\sqrt{3}} = 2\sqrt{14+\sqrt{192}} =$

$= 2\left(\sqrt{\frac{14+2}{2}} + \sqrt{\frac{14-2}{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow AT = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{4\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} =$

$= \sqrt{3}+1 \Rightarrow \Delta VAT - dreptunghic\ isoscel \Rightarrow d(V, BC) = VT = VA\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)cm.$ 2p

b) Fie $AU \perp VB, U \in (VB)$ (1)

$\left.\begin{matrix} AC \perp VA \\ AC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (VAB)$. *Dar* $\left.\begin{matrix} AC \perp (VAB) \\ AU \subset (VAB) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp AU$ (2) 1p

Din (1) *și* (2) $\Rightarrow dist(VB, AC) = UA$ (3)

$VB^2 = AB^2 + VA^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 12 + 2\sqrt{3} \Rightarrow VB = \sqrt{12+2\sqrt{3}}$ 1p

(3) $\Rightarrow dist(VB, AC) = \frac{VA \cdot AB}{VB} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{12+2\sqrt{3}}} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}$ 1p