CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS
13 aprilie 2019
CLASA a VI-a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Fie $A=\left[(-2)^{80}-\left|3^{50}-2^{80}\right|\right]:3^{49}\cdot(-1)^{m}+\left[\left|16^{10}+(-8)^{13}\right|-2^{38}\right]:2^{37}\cdot(-1)^{n}+(-1)^{p}$, *unde* $m,n,p\in\mathbb{N}$. *Arătați că* $A\,\vdots\,6$ *dacă și numai dacă* $n+p$ *este număr par.*

Barem:

$\left[(-2)^{80}-\left|3^{50}-2^{80}\right|\right]:3^{49}=3$ .... *1,5 p.*

$\left[\left|16^{10}+(-8)^{13}\right|-2^{38}\right]:2^{37}=2$ .... *1,5 p*

Se consideră cele 8 cazuri posibile din care rezultă cerința:

$$\left.\begin{array}{l}1)\, n,p\in M_2; m\in M_2\\ 2)\, n,p\in M_2; m\notin M_2\\ 3)\, n,p\notin M_2; m\in M_2\\ 4)\, n,p\notin M_2; m\notin M_2\end{array}\right\}\Rightarrow A\,\vdots\,6 \text{..................} 2p$$

$$\left.\begin{array}{l}5)\, n;m\in M_2, p\notin M_2\\ 6)\, m,p\in M_2; n\notin M_2\\ 7)\, m,p\notin M_2; n\in M_2\\ 8)\, n,m\notin M_2; p\in M_2\end{array}\right\}\Rightarrow A\,\not\vdots\,6 \text{..................} 2p$$

SUBIECTUL II

Dacă x, y, z sunt numere prime diferite, demonstrați că:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{3}.$$

Barem:

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $x<y<z$. *Dar x, y, z sunt numere prime diferite ceea ce implică* $x\geq 2,\ y\geq 3,\ z\geq 5\Longrightarrow \frac{1}{x}\leq\frac{1}{2},\ \frac{1}{y}\leq\frac{1}{3},\ \frac{1}{z}\leq\frac{1}{5}$. *4p*

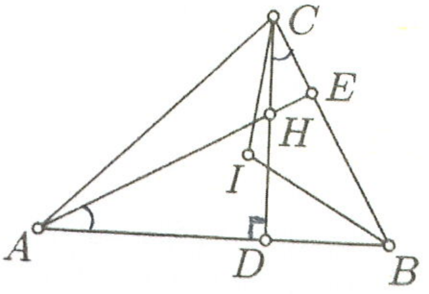
De aici deducem că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}\leq\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$ ..*2p*

și deci: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{10}=\frac{14}{45}<\frac{1}{3}.$ *1p*

SUBIECTUL III

În triunghiul ABC, I este punctual de intersecție al bisectoarelor iar H este punctual de intersecție al înălțimilor triunghiului. Dacă $m(\sphericalangle BIC) = 112°30'$ *, arătați că* $[AH] \equiv [BC]$.

Barem:



Dacă $m(\sphericalangle BIC) = 112°30'$*, atunci*

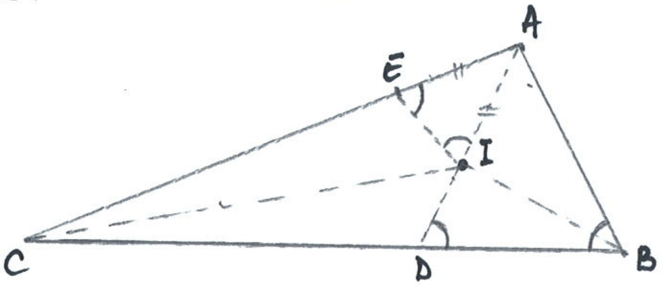
$\frac{1}{2}[m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB)] = 67°30'$, ……………………2p

Obținem că $m(\sphericalangle BAC) = 45°$. *Cum CD* $\perp$ *AB, rezultă că* $\triangle ADC$ *dreptunghic isoscel, adică* $[AD] \equiv [CD]$ …………2p

Din congruența triunghiurile dreptunghice $\triangle ADH$ *și* $\triangle CDB$ *rezultă că* $[AH] \equiv [BC]$. ………………………………………3p

SUBIECTUL IV

Fie ΔABC *cu măsurile unghiurilor* $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ *direct proporționale cu numerele 8, 7 respectiv 3. Dacă AD este bisectoarea unghiului* $\sphericalangle A$, $D \in BC$, *iar I este punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului ABC, arătați că* $AI + DC = AC$.



Barem:

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle A) = 80^\circ \\ m(\sphericalangle B) = 70^\circ \\ m(\sphericalangle C) = 30^\circ \end{array}\right\} \text{...} 1p$$

$m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle DAC) = 40^\circ$, $m(\sphericalangle ADB) = 70^\circ$, $m(\sphericalangle ADC) = 110^\circ$....................1p

Fie $E \in (AC)$ cu AE=AI $\Rightarrow$ ΔAIE=isoscel $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle AIE) = m(\sphericalangle AEI) = 70^\circ$........2p

CI este bisectoarea unghiului C $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle ICE) = m(\sphericalangle ICD) = 15^\circ$...............1p

$\Delta CEI \equiv \Delta CDI\,(L.U.U.) \Rightarrow DC = CE$....................1p

$AC = AE + EC = AI + DC$.............1p