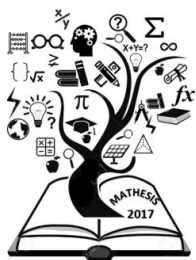


**CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS**

**13 aprilie 2019**

**CLASA a XII-a ((științele naturii, servicii, tehnic,  
resurse naturale și protecția mediului)**

**BAREM DE CORECTARE**



**SUBIECTUL 1**

Fie  $f : R \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x, & x \leq 0 \\ 3 \cdot \sin x + \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ .

a) Arătați că  $f$  admite primitive pe  $R$ ;

b) Determinați acea primitivă  $F$  a funcției  $f$  pentru care  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) + 2019 \cdot e^x) = 0$ .

**Barem:**

$f$  este continuă pe  $R - \{0\}$ . Se arată că  $f$  este continuă în  $0$ . .....1p

Se calculează  $\int f(x)dx = \begin{cases} xe^x - e^x & x \leq 0 \\ -3\cos x + x\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} + 2 & x > 0 \end{cases} + C$  .....4p

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) + 2019 \cdot e^x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x - e^x + c + 2019 \cdot e^x) = 0$

$C = 0$  .....2p

**SUBIECTUL 2**

Se consideră  $I_n = \int_0^{\frac{1}{2^n}} \frac{x}{e^{2^n x}} dx, \forall n \in N$ .

a) Calculați  $I_0$ ;

b) Demonstrați că  $I_{n+1} = \frac{1}{4} I_n, \forall n \in N$ .

c) **Barem:**

a) Calculul lui  $I_0$  .....2p

b)  $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} \frac{x}{e^{2^{n+1} x}} dx$  Se utilizează schimbarea de variabilă  $2x=t$  și se

obține  $I_{n+1} = \frac{1}{4} I_n$  .....5p

**SUBIECTUL 3**

Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = 5xy - 10x - 10y + 22$ .

- a. Să se arate că  $[2, \infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu „ $\circ$ ”.
- b. Să se determine perechile  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  pentru care  $(x^2 - 3) \circ (y^2 + 1) = 7$ .
- c. Știind că legea „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei:

$$(-2019) \circ (-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ 2017 \circ 2018 \circ 2019.$$

**Barem:**

a) Demonstrarea cerinței .....2p

b)  $(x^2 - 3) \circ (y^2 + 1) = 7 \Leftrightarrow (x^2 - 5)(y^2 - 1) = 1$  .....1p

$$\begin{cases} x^2 - 5 = 1 \\ y^2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \notin \mathbb{Z} \\ y = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5 = -1 \\ y^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

c)  $x \circ 2 = 2, \forall x \in \mathbb{R}$   
 $2 \circ y = 2, \forall y \in \mathbb{R}$  .....1p

$$[(-2019) \circ (-2018) \circ (-2017) \circ \dots \circ 1] \circ 2 \circ [3 \circ \dots \circ 2017 \circ 2018 \circ 2019] = (\alpha \circ 2) \circ \beta = 2 \dots\dots\dots 1p$$

**SUBIECTUL 4**

Să se rezolve în  $\mathbb{Z}_7$  sistemul:

$$\begin{cases} \hat{3}x + y - 2\hat{z} = \hat{6} \\ x - y - 4\hat{z} = \hat{6} \\ \hat{5}x + 2y + \hat{z} = 2 \end{cases}$$

**Barem:**

Prelucrarea ecuațiilor sau calculul determinantului matricei sistemului .....2p

Obținerea soluțiilor  $\begin{cases} x = \hat{3} - 2\alpha \\ y = \alpha - \hat{3} \\ \hat{z} = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{Z}_7$  ..... 5p