CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS

13 aprilie 2019

CLASA a XII-a (matematică-informatică)

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Fie $M=\{x^2+y^2 / x,y\in Z[i]\}$ *unde* $Z[i]=\{a+ib / a,b\in Z\}$

a) *Să se demonstreze că* $i\notin M$

b) *Să se arate că* $Z[i]-M$ *are o infinitate de elemente*

Barem:

a) *Presupunem prin reducere la absurd că* $i\in M$.

$i=x^2+y^2,\quad x=a+ib,\quad y=c+id,\quad a,b,c,d\in Z\Rightarrow i=a^2+c^2-b^2-d^2+2(ab+cd)i\Rightarrow$

$\Rightarrow 1=2(ab+cd)\Rightarrow ab+cd=\frac{1}{2}$ *fals* …………………………………………………………4p

b) *Demonstrăm că* $z=n+i\notin M,\ \forall n\in N$

Presupunem prin reducere la absurd că $\exists n\in N$ *a.î.*

$z=n+i\in M\Rightarrow n+i=x^2+y^2,\quad x=a+ib,\quad y=c+id,\quad a,b,c,d\in Z$

$n+i=a^2+c^2-b^2-d^2+2(ab+cd)i\ \Rightarrow 1=2(ab+cd)\Rightarrow ab+cd=\frac{1}{2}$ *fals* ……………………….2p

Cum $z=n+i\in Z[i]\Rightarrow z=n+i\in Z[i]-M,\quad \forall n\in N$ *deci* $Z[i]-M$ *are o infinitate de elemente…1p.*

SUBIECTUL 2

Fie $(\mathrm{M},\cdot)$ *un monoid finit cu elementul neutru notat cu* e. *Să se arate că dacă* $a^2\neq a$ *pentru orice* $a\in M-\{e\}$ *atunci* $(\mathrm{M},\cdot)$ *este grup.*

Barem:

Fie $a\in M$. *Deoarece M este finit, există i și* $k\in N^*$ *cu* $a^i=a^{i+k}$ *(principiul cutiei).* ………………2p

Prin înmulțiri succesive cu a^k *rezultă* $a^i=a^{i+nk}$, $\forall n\in N^*$ *(1)* ……………………………………….2p

Alegem $n\in N^*$ *cu* $nk>i$.

Înmulțind (1) cu a^{nk-i} *obținem* $a^{nk}=a^{2nk}$. *Fie* $b=a^{nk}$. *Atunci* $b^2=b$ *deci* $b=e$. *Rezultă că* $a^{nk}=e$*, deci a este inversabil. În consecință M este grup.* …………………………………… ……3p

SUBIECTUL 3

Fie funcția $f:(-1,1)\to R\quad f(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x}\ln\left(1+\sin^2 t\right)dt$

a) *Să se calculeze* $f'(x),\quad x\in(-1,1)$

b) *Să se calculeze* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(y)dy$

Barem:

a) *Fie G o primitivă a funcției*

$$g:R\to R,\quad g(t)=\ln\left(1+\sin^2 t\right)\Rightarrow f(x)=G(t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x}=G(\arcsin x)-G\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Atunci $f'(x)=G'(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\left(1+x^2\right)$ ………………………………………....3p

b) $$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(y)dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y'\cdot f(y)dy=y\cdot f(y)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\cdot f'(y)dy=-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\cdot\ln\left(1+y^2\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-y^2}\right)'\cdot\ln\left(1+y^2\right)dy=\sqrt{1-y^2}\cdot\ln\left(1+y^2\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\cdot\frac{2y}{1+y^2}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3}{2}-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\cdot\frac{2y}{1+y^2}$$ ………………………………………………………….....2p

Cu schimbarea de variabilă $z=\sqrt{1-y^2}$ *obținem* $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-y^2}\right)\cdot\frac{2y}{1+y^2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{2z^2}{2-z^2}dz=$

$$=-2\left(z+2\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(9-6\sqrt{2}\right)\right)$$ ………………………………2p

SUBIECTUL 4

Fie funcția $f:R\to R,\quad f(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$

a) *Să se arate că* $\forall n\in N, n\geq 2,$ *funcția* $F:R\to R$, $F(x)=\int_0^x t^{2n} f(t)dt$ *este bijectivă*

b) *Să se arate că* $\forall a\in R,\ \int_1^a f(t)dt<\frac{1}{4}$

Barem:

a) Fie $g:R\to R,\quad g(t)=t^{2n}f(t)$, *continuă și fie G o primitivă a sa*

Atunci $F(x)=G(x)-G(0)\Rightarrow F'(x)=G'(x)=x^{2n}f(x)>0, \forall x\in R\Rightarrow$ *F este strict crescătoare deci este injectivă*……………………………………………………………………………….....…………………………….2p

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^{2n}f(t)dt=\infty \text{ deoarece } \int_0^x t^{2n}f(t)dt\geq\int_1^x\frac{t^{2n}}{\left(1+t^2\right)^2}dt\geq\int_1^x\frac{t^4}{\left(2t^2\right)^2}=\frac{x-1}{4},\quad\forall x\geq 1$$

Dar $F(-x)=\int_0^{-x}t^{2n}f(t)dt=-\int_0^x y^{2n}f(-y)dy=-F(x)$ *deci F este impară* $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$

Cum F este continuă $\Rightarrow \operatorname{Im}F=R\Rightarrow F$ *surjectivă* ……………………………………………………….....2p

b) $\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\left(arctgx+\frac{x}{1+x^2}\right)+C$ ………………………………………………………………….....2p

$\int_1^a f(t)dt=\frac{1}{2}\left(arctga+\frac{a}{a^2+1}-\frac{\pi+2}{4}\right)\Rightarrow\lim_{a\to\infty}\int_1^a f(t)dt=\frac{\pi-2}{8}<\frac{1}{4}$ ……………………………….1p