CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS

13 aprilie 2019

CLASA a X-a (științele naturii, servicii, tehnic, resurse naturale și protecția mediului)

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Fie $f : D \to R, \quad f(x) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(7 - 2\sqrt{x} - x\right)$

a) *Să se arate că mulțimea maximă de definiție a funcției f este* $D = \left[0; 9 - 4\sqrt{2}\right)$;

b) *Găsiți punctele de coordonate întregi situate pe graficul funcției f.*

Barem:

a) $7 - 2\sqrt{x} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left[0, 2\sqrt{2} - 1\right) \Leftrightarrow x \in \left[0, 9 - 4\sqrt{2}\right)$ ……………………………….3p

b) *Dacă*

$x \in \left[0, 9 - 4\sqrt{2}\right) \cap Z \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ……………………………………………………….1p

$f(0) = \log_{\sqrt{3}-1} 7 \notin Z$, $f(1) = \log_{\sqrt{3}-1} 4 \notin Z$, $f(2) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(5 - 2\sqrt{2}\right) \notin Z$

$f(3) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = 2 \in Z \Rightarrow A(3, 2) \in G_f$ …………………….3p

SUBIECTUL 2

a) *Să se arate că funcția* $f : (0, \infty) \to R, \quad f(x) = x + \log_3 x + 3^x$ *este strict crescătoare;*

b) ***S****ă se rezolve ecuația:* $\left[x^2 + 1\right] + \log_3\left[x^2 + 1\right] + 3^{\left[x^2+1\right]} = 31$ *(s-a notat cu* $[x]$ *- partea întreagă a lui x)*

Barem:

a) *Funcțiile* $f_1, f_2, f_3 : (0, \infty) \to R, \quad f_1(x) = x,\ f_2(x) = \log_3 x,\ f_3(x) = 3^x$ *sunt strict crescătoare* $\Rightarrow f : (0, \infty) \to R, \quad f(x) = x + \log_3 x + 3^x$ *este strict crescătoare* ………….2p

b) *Substituind* $\left[x^2 + 1\right] = y, y \in N^*$ *se obţine ecuaţia* $y + \log_3 y + 3^y = 31 \Rightarrow$ *y=3 care este soluţie unică conform pct a)*…………………..4p

$x \in \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ ………………………………………………………….1p.

SUBIECTUL 3

Se ştie că dacă o cantitate N *creşte cu un procent constant, atunci ea poate fi descrisă printr-o funcţie de forma* $N: [\,0, +\infty\,) \to \mathbf{R}, N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ *, numită funcţie de creştere exponenţială, unde* t *- timpul exprimat în ani,* N_0 *- valoarea iniţială a cantităţii* N *la timpul* $t = 0$ *şi* $k > 0$ *procentul constant de creştere. Un oraş are o populaţie de 17.400 de locuitori la data de 01.01.2019. Se estimează o creştere a populaţiei cu o rata de creştere constantă de* 5,3% *pe an.*

a). Determinaţi funcţia care dă populaţia oraşului după t ani.

b). Care va fi populaţia oraşului la 01.01.2020 şi cu câţi locuitori va creşte?(se consideră cunoscut faptul că $e^{0,053} \simeq 1,05443$*)*

c). Dacă $ln2 \simeq 0{,}693147$, *aproximativ câţi ani sunt necesari pentru ca populaţia oraşului să se dubleze?*

Barem:

a). *Funcţia de creştere are forma* $N: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ *conform ipotezei, valoarea iniţială a cantităţii* $N_0 = 17.400$, *procentul constant de creştere este* $k = 0{,}053$ *şi* t *timpul exprimat în ani* $\Rightarrow N: (0, +\infty) \to \mathbf{R}, N(t) = N(t) = 17400 \cdot e^{0{,}053 \cdot t}$ *……………………………………………1p*

b). *dacă populaţia oraşului la 01.01.2019 este de 17400 de locuitori, după un an va fi*

$N(1) = 17400 \cdot e^{0{,}053} \simeq 18347 \Rightarrow 18347 - 17400 = 947$

Deci, după 1 an, populaţia va creşte cu 947 *locuitori …………………………………………………2p*

c). notăm $t_n =$ *timpul necesar ca populaţia oraşului să se dubleze*

$N(t_n) = 2 \cdot 17400 = 34800 \Rightarrow 17400 \cdot e^{0{,}053 \cdot t_n} = 34800 \Rightarrow e^{0{,}053 \cdot t_n} = 2 \Rightarrow$ *…………………2p*

$0{,}053 \cdot t_n = ln2 \Rightarrow t_n = \frac{ln2}{0{,}053} = \frac{0{,}693147}{0{,}053} \simeq 13$ *………………………………………………2p*

SUBIECTUL 4

Dacă $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ *sunt 4 numere complexe distincte care au același modul și* $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ *să se arate că ABCD este dreptunghi, unde A,B,C,D sunt punctele de afixe* z_1, z_2, z_3, z_4.

Barem:

Deoarece $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = r$ *rezultă că A,B,C,D sunt situate pe cercul cu centrul în originea O și de rază r ………………………………………………………………………………1p*

Fie M ,N proiecțiile punctului O pe AB, respective CD.

Din $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -(z_3 + z_4) \Rightarrow 2\overrightarrow{OM} = -2\overrightarrow{ON}$ *deci punctele M, O, N sunt coliniare și* $OM = ON$ *……………………………………………………………………3p*

M, O, N sunt coliniare $\Rightarrow AB // CD$ *(1)*

$OM = ON \Rightarrow AB = CD$ *(2)*

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ *ABCD este paralelogram și cum este și inscriptibil* $\Rightarrow$ *ABCD este dreptunghi ……………………………………………………………………………………3p*