CONCURSUL DE MATEMATICĂ MATHESIS

13 aprilie 2019

CLASA a X-a (matematică-informatică)

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

Fie $f:(0,\infty)\to R,\quad f(x)=3^{\lg x}+7.$

a) *Arătați că* f *este injectivă și că* $f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$.

b) *Rezolvați ecuația* $3^{\lg\left(3^{\lg x}+7\right)}+7=x$

Barem:

a) *Dacă* $x_1<x_2 \Rightarrow \lg x_1<\lg x_2 \Rightarrow 3^{\lg x_1}<3^{\lg x_2} \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$ *f strict crescătoare* $\Rightarrow$ f *injectivă* ………………………………………………………………………………………..2p

Fie $x\in(0,\infty)$ *a.î.* $f(f(x))=x$

Dacă $x\in(0,\infty)$ *a.î.* $f(x)>x \Rightarrow f(f(x))>f(x)>x$ *fals*

Dacă $x\in(0,\infty)$ *a.î.* $f(x)<x \Rightarrow f(f(x))<f(x)<x$ *fals*

Deci $f(x)=x$

Reciproc, dacă $f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=f(x)=x$ …………………………………………………2p

b) *Din a) rezultă că* $3^{\lg\left(3^{\lg x}+7\right)}+7=x \Leftrightarrow f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$

Notând $\lg x$ *cu* y *ecuația devine* $3^y+7=10^y \Leftrightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^y+7\left(\frac{1}{10}\right)^y=1$

Funcția $g:R\to R,\quad g(x)=\left(\frac{3}{10}\right)^y+7\left(\frac{1}{10}\right)^y$ *fiind strict descrescătoare rezultă că ecuația* $g(y)=1$ *are soluție unică deci* $y=1$ *adică* $x=10$ ……………………………………………..3p

SUBIECTUL 2

Se dă funcția $f:N^*\to N^*$ *astfel încât* $f(1)=a\in N^*$ *și*

$$\frac{1}{2f(1)}+\frac{1}{3f(2)}+\frac{1}{4f(3)}+\ldots+\frac{1}{nf(n-1)}=\frac{n-1}{f(n)},\ \forall n\in N,\ n\geq 2$$

a) *Demonstrați că* $f(n)=na, \forall n\in N^*$

b) *Pentru ce valori* $a\in N^*$ *funcția determinată la punctul a) este surjectivă?*

Barem:

a) *Pentru* $n=2$ *se obține* $f(2)=2a$ ………………………………………………….…………..1p

Demonstrația prin inducție ……………………………………………………………………3p

b) $f\left(N^*\right)=\{a,2a,3a,......\}$ ……………………………………………………………………….1p

Dacă $a\neq 1\Rightarrow f\left(N^*\right)\neq N^*$ *pentru că, de exemplu, între a și 2a există cel puțin un număr natural care nu aparține lui* $f\left(N^*\right)$

Dacă $a=1\Rightarrow f\left(N^*\right)=N^*$ *deci f este surjectivă*……………………………………….……2p

SUBIECTUL III

Fie $z_1,z_2,z_3\in C^*$ *astfel încât* $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

a) Arătați că $z_1+z_2+z_3=0\Leftrightarrow z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\,z_1=0$;

b) Dacă $A(z_1),B(z_2),C(z_3)$ *sunt punctele de afixe* z_1,z_2,z_3 *și* $z_1+z_2+z_3=0$ *demonstrați că* ΔABC *este echilateral.*

Barem:

a) Fie $r=|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0\Rightarrow \overline{z_1}=\dfrac{r^2}{z_1},\quad \overline{z_2}=\dfrac{r^2}{z_2},\quad \overline{z_3}=\dfrac{r^2}{z_3}$

Atunci $z_1+z_2+z_3=0\Leftrightarrow \overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0\Leftrightarrow \dfrac{r^2}{z_1}+\dfrac{r^2}{z_2}+\dfrac{r^2}{z_3}=0\Leftrightarrow z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\,z_1=0$ ……..3p

b) $z_1+z_2+z_3=0\Rightarrow -z_3=z_1+z_2$ *și* $z_3\left(z_1+z_2\right)+z_1\cdot z_2=0\Rightarrow -\left(z_1+z_2\right)^2+z_1\cdot z_2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_1\cdot z_2=0\Rightarrow\left(z_1-z_2\right)^2+3z_1\cdot z_2=0\Rightarrow|z_1-z_2|^2=|3z_1\cdot z_2|=3r^2\Rightarrow|z_1-z_2|=\sqrt{3}r$ ….3p

Analog $|z_2-z_3|=\sqrt{3}r$ *și* $|z_3-z_1|=\sqrt{3}r$ *prin urmare* ΔABC *este echilateral.* …………………....1p

SUBIECTUL IV

Fie $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\in C$ *și* $f:C\to C$ *o funcție cu proprietatea* $f(z)+f(\varepsilon z)=z,\forall z\in C$.

a) *Arătați că* $\varepsilon^3=1$ *și* $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$;

b) *Demonstrați că* $f(1)+f(\varepsilon)+f\left(\varepsilon^2\right)=0$;

c) *Determinați funcția f.*

Barem:

a) Pentru demonstrarea relațiilor $\varepsilon^3=1$ *și* $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$; …………………… ……………………2p *b) Dacă în relația dată înlocuim pe z cu 1,* ε *respectiv* ε^2 *obținem:* $\left.\begin{array}{r} f(1)+f(\varepsilon)=1 \\ f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)=\varepsilon \\ f(\varepsilon^2)+f(\varepsilon^3)=\varepsilon^2 \end{array}\right\} \overset{a)}{\Rightarrow}$

$2\left(f(1)+f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)\right)=1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ *deci* $f(1)+f(\varepsilon)+f(\varepsilon^2)=0$ ……………………………………*2p*

c) Dacă în relația dată înlocuim pe z cu εz *, respectiv* $\varepsilon^2 z$ *obținem:*

$\left.\begin{array}{r} f(z)+f(\varepsilon z)=z \\ -f(\varepsilon z)-f(\varepsilon^2 z)=-\varepsilon z \\ f(\varepsilon^2 z)+f(\varepsilon^3 z)=\varepsilon^2 z \end{array}\right\} \overset{a)}{\Rightarrow} 2f(z)=z\left(1-\varepsilon+\varepsilon^2\right)=z(1-\varepsilon-1-\varepsilon) \Rightarrow f(z)=-\varepsilon z$ ………………*3p*